Differentiaalvergelijkingen

Technische Universiteit Delft

Roelof Koekoek

wi2030WbMT

Het vinden van een particuliere oplossing

Voor een lineaire differentiaalvergelijking met constante (reële) coëfficiënten

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = g(t), \quad a_0 \neq 0 \quad (1)$$

geldt, dat de algemene oplossing is te schrijven in de vorm

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t), \quad (2)$$

waarbij $y_h(t)$ de algemene oplossing van de gereduceerde (homogene) differentiaalvergelijking

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = 0 \quad (3)$$

is en $y_p(t)$ een zogenaamde *particuliere* oplossing van (1).

Het vinden we zo'n particuliere oplossing?

Soms heeft de bekende term $g(t)$ een gedaante waardoor we de vorm van een *particuliere* oplossing $y_p(t)$ kunnen voorspellen. Bijvoorbeeld, in het geval van e-machten, polynomen, de goniometrische functies cosinus en sinus en allerlei combinaties daarvan. Immers: afgeleiden van e-machten zijn weer e-machten, afgeleiden van polynomen zijn weer polynomen en de functies cosinus en sinus zijn (min of meer) elkaars afgeleiden.

Als $g(t) = e^{at}$ voor zekere $a \in \mathbb{R}$, dan kiest men in principe $y_p(t) = Ae^{at}$. Bijvoorbeeld: voor

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^{3t}$$

geldt, dat $y_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$ en kunnen we $y_p(t) = Ae^{3t}$ proberen. Invullen geeft dan: $(9 - 9 + 2)Ae^{3t} = e^{3t}$ oftewel $A = \frac{1}{2}$. Dus: $y_p(t) = \frac{1}{2}e^{3t}$.

Dit gaat echter mis als e^{at} voorkomt in de algemene oplossing $y_h(t)$ van de bijbehorende homogene differentiaalvergelijking. Bijvoorbeeld: als

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^t,$$

dan is $y_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$ en heeft het geen zin om $y_p(t) = Ae^t$ te proberen. Dit zal voor elke waarde van $A \in \mathbb{R}$ immers nul opleveren in het rechterlid en niet e^t. Probeer dan: $y_p(t) = Ate^t$. Invullen geeft dan $A(t + 2 - 3t - 3 + 2t)e^t = e^t$ oftewel $A = -1$. Dus: $y_p(t) = -te^t$.

Als $g(t)$ een combinatie van $\cos(at)$ en $\sin(at)$ voor zekere $a \in \mathbb{R}$ is, dan proberen we in principe $y_p(t) = A\cos(at) + B\sin(at)$.
Bijvoorbeeld: voor

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \cos(2t)$$

geldt, dat $y_h(t) = c_1e^t + c_2e^{2t}$ en kunnen we
$y_p(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$ proberen. Dan volgt:
$y_p'(t) = -2A\sin(2t) + 2B\cos(2t)$ en
$y_p''(t) = -4A\cos(2t) - 4B\sin(2t)$. Invullen geeft dan:

$$(-4A - 6B + 2A)\cos(2t) + (-4B + 6A + 2B)\sin(2t) = \cos(2t).$$

Hieruit volgt dat $-2A - 6B = 1$ en $6A - 2B = 0$ oftewel $A = -\frac{1}{20}$ en $B = -\frac{3}{20}$. Dus: $y_p(t) = -\frac{1}{20}\cos(2t) - \frac{3}{20}\sin(2t)$.

Dit gaat echter mis als $\cos(at)$ en/of $\sin(at)$ voorkomt in de algemene oplossing $y_h(t)$ van de bijbehorende homogene differentiaalvergelijking. Bijvoorbeeld: als

$$y''(t) + 4y(t) = \sin(2t),$$

dan is $y_h(t) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t)$ en heeft het geen zin om $y_p(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$ te proberen. Dit zal voor elke waarde van $A, B \in \mathbb{R}$ immers nul opleveren in het rechterlid en niet $\sin(2t)$. Probeer dan: $y_p(t) = At\cos(2t) + Bt\sin(2t)$. Dan volgt:

$$y_p'(t) = A(-2t\sin(2t) + \cos(2t)) + B(2t\cos(2t) + \sin(2t))$$

en

$$y_p''(t) = A(-4t\cos(2t) - 4\sin(2t)) + B(-4t\sin(2t) + 4\cos(2t)).$$

Invullen geeft dan

$$-4A\sin(2t) + 4B\cos(2t) = \sin(2t) \quad \Longrightarrow \quad A = -\tfrac{1}{4} \quad \text{en} \quad B = 0.$$

Dus: $y_p(t) = -\frac{1}{4}t\cos(2t)$.

Als $g(t)$ een polynoom is, dan kiezen we in principe een polynoom (van dezelfde graad) als particuliere oplossing. Bijvoorbeeld: voor

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = t^2$$

geldt, dat $y_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$ en kunnen we $y_p(t) = At^2 + Bt + C$ proberen. Invullen geeft dan: $2A - 3(2At + B) + 2(At^2 + Bt + C) = t^2$ oftewel $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{3}{2}$ en $C = \frac{7}{4}$. Dus: $y_p(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{7}{4}$.

Dit gaat echter mis als een deel van zo'n polynoom voorkomt in de algemene oplossing $y_h(t)$ van de bijbehorende homogene differentiaalvergelijking. Bijvoorbeeld: als

$$y''(t) - 3y'(t) = t^2,$$

dan is $y_h(t) = c_1 + c_2 e^{3t}$. De constante c_1 is een polynoom van de graad nul. Als de bekende term $g(t)$ een constante zou zijn, dan heeft het geen zin zin om een constante als particuliere oplossing te proberen. We zouden dan een factor t moeten toevoegen en dus een polynoom van de graad één moeten proberen. In dit geval ($g(t) = t^2$) kiezen we daarom $y_p(t) = At^3 + Bt^2 + Ct$, een polynoom van de graad drie. Merk op, dat we de eventuele constante D achterwege kunnen laten omdat deze al in $y_h(t)$ voorkomt. Invullen geeft nu $6At + 2B - 3(3At^2 + 2Bt + C) = t^2$ oftewel $A = -\frac{1}{9}$, $B = -\frac{1}{9}$ en $C = -\frac{2}{27}$. Dus: $y_p(t) = -\frac{1}{9}t^3 - \frac{1}{9}t^2 - \frac{2}{27}t$.

Merk op dat in de differentiaalvergelijking.

$$y''(t) - 3y'(t) = t^2$$

geen term met $y(t)$ voorkomt. Een particuliere oplossing $y_p(t)$ die voor $y(t)$ wordt ingevuld, moet dus sowieso eerst gedifferentiëerd worden. Zo ziet men ook dat een tweedegraads polynoom niet kan voldoen, maar dat we een derdegraads polynoom nodig hebben:

$$y_p(t) = At^3 + Bt^2 + Ct.$$

Voorbeeld: als $y''(t) = t^2$, dan heeft men een vierdegraads polynoom nodig:

$$y_p(t) = At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Dt + E,$$

maar aangezien $r = 0$ een dubbel nulpunt is van de karakteristieke vergelijking $r^2 = 0$ is $y_h(t) = c_1 + c_2 t$. Men kan daarom volstaan met

$$y_p(t) = At^4 + Bt^3 + Ct^2.$$

Invullen leidt dan tot: $A = \frac{1}{12}$ en $B = C = 0$. Dus: $y_p(t) = \frac{1}{12}t^4$.