Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Toets wi2604: Numerieke methoden voor differentiaalvergelijkingen
woensdag 6 april 2005, 9:00-10:30

1. Van een functie f zijn een aantal waarden in de volgende tabel gegeven:

x	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
f(x)	1	0.8825	0.7788	0.6065

   (a) Gegeven de voorwaartse formule $Q_1(h) = \frac{f(h)-f(0)}{h}$ voor het benaderen van $f'(0)$. Bepaal een uitdrukking voor de afbreekfout van deze benadering.

   (b) Bereken $Q_1(\frac{1}{8})$. Bepaal een schatting voor de fout $f'(0) - Q_1(\frac{1}{8})$. Hierbij mag je aannemen dat $f'(0) - Q_1(h) = Kh$(Richardson foutschatting).

   (c) Geef een bovengrens voor de afrondfout $|\tilde{Q}_1(\frac{1}{8}) - Q_1(\frac{1}{8})|$.

   (d) Een andere formule, $Q_2(h)$, wordt gedefinieerd door:

$$Q_2(h) = \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f(h) + \alpha_2 f(2h).$$

   Bepaal α_0, α_1 en α_2 zo dat $f'(0) - Q_2(h) = O(h^2)$ en geef $Q_2(\frac{1}{8})$.

   (e) Aan welke methode geef je de voorkeur (+ motivatie)?

2. Gegeven is een predictor-corrector methode voor de differentiaalvergelijking:

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0$$

door

$$\begin{aligned} u^* &= u_i + \alpha h f(t_i, u_i) \\ u_{i+1} &= u_i + h f(t_i + \alpha h, u^*), \quad \alpha > 0 \end{aligned}$$

   (a) Laat zien dat de lokale afbreekfout van deze methode $O(h)$ is voor $\alpha \neq \frac{1}{2}$ en $O(h^2)$ voor $\alpha = \frac{1}{2}$.

   (b) Bepaal de versterkingsfactor van deze methode.

   (c) Onderzoek de stabiliteit van de methode voor *zuiver imaginaire* λ. Voor welke waarden van α is de methode niet stabiel? Wat is de gunstigste keuze van α?

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi211/tentamen.html