

# Technische Universiteit Delft

## Faculteit Informatietechnologie en Systemen

Toets wi2091: Numerieke methoden voor differentiaalvergelijkingen <sup>1</sup>  
maandag 25 maart 2002, 14:00-15:30

1. We beschouwen tweede orde Lagrange interpolatie:  $f(x) = p(x) + r(x)f'''(\xi)$ . De formule voor  $p$  is hieronder gedeeltelijk gegeven:

$$p(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) \text{ met } L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}.$$

- (a) Laat zien dat  $L_0(x) + L_1(x) + L_2(x) = 1$  voor alle  $x$ .
- (b) Geef de formules voor  $L_1(x)$ ,  $L_2(x)$  en  $r(x)$ .
- (c) Vanaf nu veronderstellen we dat  $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1$ . Door afrondfouten rekenen we met  $\hat{f}$  in plaats van met  $f$ , waarbij  $|\hat{f}(x) - f(x)| \leq \epsilon$  voor alle  $x$ . Toon aan dat  $|\hat{p}(x) - p(x)| < 1.25\epsilon$  als  $\hat{p} = L_0(x)\hat{f}(x_0) + L_1(x)\hat{f}(x_1) + L_2(x)\hat{f}(x_2)$  (hint: schrijf  $x = x_0 + \alpha h$ ).
- (d) We hebben de volgende tabel:

$x$	$e^x$
-0.2	0.8187
-0.1	0.9048
0	1.0000

Geef een schatting van de afbreekfout en de afrondfout in de benadering  $\hat{p}(-0.05)$  van  $e^{-0.05}$ . Is het zinvol om de getallen in de tabel met meer cijfers te bepalen (+motivatie)?

2. (a) Geef de Euler Voorwaarts (EV) en de Euler Achterwaarts (EA) methode. Geef aan of de methode expliciet of impliciet is.
- (b) Leid de versterkingsfactor af voor beide methoden.
- (c) Leid voor beide methoden de orde van de afbreekfout af voor de testvergelijking.
- (d) Onderzoek de stabiliteit van beide methoden voor  $\lambda \in \mathbb{R}$  en  $\lambda \leq 0$ .
- (e) Gegeven het volgende beginwaarde probleem:

$$y'' + 100y' + 99y = t, \text{ met } y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

Schrijf dit probleem als een stelsel eerste orde differentiaalvergelijkingen.

- (f) Welke numerieke methode (EV of EA) zou u kiezen om bovenstaand beginwaardeprobleem op te lossen (+motivatie)?

---

<sup>1</sup>voor de antwoorden zie: <http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi211/tentamen.html>