Het vinden van een particuliere oplossing

Voor een lineaire differentiaalvergelijking met constante (reële) coëfficiënten

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = g(t), \quad a_0 \neq 0 \tag{1}$$

geldt, dat de algemene oplossing is te schrijven in de vorm

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t), \tag{2}$$

waarbij $y_h(t)$ de algemene oplossing van de gereduceerde (homogene) differentiaalvergelijking

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = 0 \tag{3}$$

is en $y_p(t)$ een zogenaamde *particuliere* oplossing van (1).

De algemene oplossing $y_h(t)$ van de homogene differentiaalvergelijking (3) kunnen we bepalen met behulp van de karakteristieke vergelijking

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0.$$

Aangezien de coëfficiënten reëel zijn, komen niet-reële oplossingen voor r alleen voor in complex geconjugeerde paren. Bovendien heeft deze vergelijking n (complexe) oplossingen geteld met multipliciteit (er kunnen eventueel samenvallende reële oplossingen optreden). We kunnen daarmee dus n lineair onafhankelijke oplossingen $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ vinden, die via het superpositieprincipe leiden tot de algemene oplossing

$$y_h(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \ldots + c_n y_n(t)$$

met n willekeurige (reële) constanten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ (de vrijheidsgraden).

Voor de algemene oplossing (2) van de inhomogene differentiaalvergelijking (1) hebben we dan alleen nog een *particuliere* oplossing $y_p(t)$ nodig, die ingevuld in het linkerlid precies de bekende term $g(t)$ in het rechterlid oplevert.

Methode van onbepaalde coëfficiënten

Soms heeft de bekende term $g(t)$ een gedaante waardoor we de vorm van een *particuliere* oplossing $y_p(t)$ kunnen voorspellen. Bijvoorbeeld, in het geval van e-machten, polynomen, de goniometrische functies cosinus en sinus en allerlei combinaties daarvan. Immers: afgeleiden van e-machten zijn weer e-machten, afgeleiden van polynomen zijn weer polynomen en de functies cosinus en sinus zijn (min of meer) elkaars afgeleiden.

Als $g(t) = e^{at}$ voor zekere $a \in \mathbb{R}$, dan kiest men in principe $y_p(t) = Ae^{at}$. Bijvoorbeeld: voor

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^{3t}$$

geldt, dat $y_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$ en kunnen we $y_p(t) = Ae^{3t}$ proberen. Invullen geeft dan: $(9 - 9 + 2)Ae^{3t} = e^{3t}$ oftewel $A = \frac{1}{2}$. Dus: $y_p(t) = \frac{1}{2}e^{3t}$.

Dit gaat echter mis als e^{at} voorkomt in de algemene oplossing $y_h(t)$ van de bijbehorende homogene differentiaalvergelijking. Bijvoorbeeld: als

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^t,$$

dan is $y_h(t) = c_1e^t + c_2e^{2t}$ en heeft het geen zin om $y_p(t) = Ae^t$ te proberen. Dit zal voor elke waarde van $A \in \mathbb{R}$ immers nul opleveren in het rechterlid en niet e^t. Probeer dan: $y_p(t) = Ate^t$. Invullen geeft dan $A(t + 2 - 3t - 3 + 2t)e^t = e^t$ oftewel $A = -1$. Dus: $y_p(t) = -te^t$.

Als

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = te^{2t},$$

dan is $y_h(t) = c_1e^t + c_2e^{2t}$ en zouden we dus $y_p(t) = Ate^{2t}$ moeten proberen om in het rechterlid een constante maal e^{2t} te krijgen. Om te^{2t} te krijgen, voegen we daarom nog een factor t toe: probeer $y_p(t) = At^2e^{2t} + Bte^t$. Dan volgt: $y_p'(t) = A(2t^2 + 2t)e^{2t} + B(2t + 1)e^{2t}$ en $y_p''(t) = A(4t^2 + 8t + 2)e^{2t} + B(4t + 4)e^{2t}$. Invullen geeft dan:

$$A(4t^2 + 8t + 2 - 6t^2 - 6t + 2t^2)e^{2t} + B(4t + 4 - 6t - 3 + 2t)e^{2t} = te^{2t}$$

oftewel $A = \frac{1}{2}$ en $B = -1$. Dus: $y_p(t) = \frac{1}{2}t^2e^{2t} - te^{2t}$. Merk op, dat de term Bte^{2t} nodig was om een particuliere oplossing te vinden. Bij het invullen van de vorm At^2e^{2t} wordt deze vorm ook gedifferentiëerd, waardoor ook de vorm Bte^{2t} ontstaat. Merk op, dat dan ook iets van de vorm Ce^{2t} ontstaat zodat we eigenlijk $y_p(t) = (At^2 + Bt + C)e^{2t}$ zouden moeten proberen. Echter: aangezien de vorm Ce^{2t} voorkomt in $y_h(t)$ zal $C \in \mathbb{R}$ willekeurig gekozen kunnen worden. Kies dan maar $C = 0$; dan hoeft dat deel in de berekening niet meegenomen te worden. In de algemene oplossing $y(t) = y_p(t) + y_h(t)$ komt deze vorm immers weer terug met een willekeurige coëfficiënt c_2.

Als

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = t^2e^{-2t},$$

dan is $y_h(t) = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t}$. In dat geval zouden we dus $y_p(t) = At^2e^{-2t}$ moeten kiezen om in het rechterlid een constante maal e^{-2t} te krijgen. In dit geval staat er een factor t^2 voor en proberen we dus $y_p(t) = (At^4 + Bt^3 + Ct^2)e^{-2t}$. Merk op dat de vorm $(Dt + E)e^{-2t}$ weggelaten kan worden (dat staat al in $y_h(t)$). Dan volgt:

$$y_p'(t) = -2At^4e^{-2t} + (4A - 2B)t^3e^{-2t} + (3B - 2C)t^2e^{-2t} + 2Cte^{-2t}$$

en

$$y_p''(t) = 4At^4e^{-2t} + (-16A + 4B)t^3e^{-2t} + (12A - 12B + 4C)t^2e^{-2t} + (6B - 8C)te^{-2t} + 2Ce^{-2t}.$$

Invullen geeft dan

$$\begin{aligned}(4A - 8A + 4A)t^4e^{-2t} &+ (-16A + 4B + 16A - 8B + 4B)t^3e^{-2t}\\ &+ (12A - 12B + 4C + 12B - 8C + 4C)t^2e^{-2t}\\ &+ (6B - 8C + 8C)te^{-2t} + 2Ce^{-2t} = t^2e^{-2t}\end{aligned}$$

en dus $12A = 1$, $6B = 0$ en $2C = 0$ oftewel $A = \frac{1}{12}$ en $B = C = 0$. Dus: $y_p(t) = \frac{1}{12}t^4e^{-2t}$.

Als $g(t)$ een combinatie van $\cos(at)$ en $\sin(at)$ voor zekere $a \in \mathbb{R}$ is, dan proberen we in principe $y_p(t) = A\cos(at) + B\sin(at)$. Bijvoorbeeld: voor

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \cos(2t)$$

geldt, dat $y_h(t) = c_1e^t + c_2e^{2t}$ en kunnen we $y_p(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$ proberen. Dan volgt: $y_p'(t) = -2A\sin(2t) + 2B\cos(2t)$ en $y_p''(t) = -4A\cos(2t) - 4B\sin(2t)$. Invullen geeft dan:

$$(-4A - 6B + 2A)\cos(2t) + (-4B + 6A + 2B)\sin(2t) = \cos(2t).$$

Hieruit volgt dat $-2A - 6B = 1$ en $6A - 2B = 0$ oftewel $A = -\frac{1}{20}$ en $B = -\frac{3}{20}$. Dus: $y_p(t) = -\frac{1}{20}\cos(2t) - \frac{3}{20}\sin(2t)$.

Dit gaat echter mis als $\cos(at)$ en/of $\sin(at)$ voorkomt in de algemene oplossing $y_h(t)$ van de bijbehorende homogene differentiaalvergelijking. Bijvoorbeeld: als

$$y''(t) + 4y(t) = \sin(2t),$$

dan is $y_h(t) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t)$ en heeft het geen zin om $y_p(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$ te proberen. Dit zal voor elke waarde van $A, B \in \mathbb{R}$ immers nul opleveren in het rechterlid en niet $\sin(2t)$. Probeer dan: $y_p(t) = At\cos(2t) + Bt\sin(2t)$. Dan volgt:

$$y_p'(t) = A(-2t\sin(2t) + \cos(2t)) + B(2t\cos(2t) + \sin(2t))$$

en

$$y_p''(t) = A(-4t\cos(2t) - 4\sin(2t)) + B(-4t\sin(2t) + 4\cos(2t)).$$

Invullen geeft dan

$$-4A\sin(2t) + 4B\cos(2t) = \sin(2t) \quad \Longrightarrow \quad A = -\frac{1}{4} \quad \text{en} \quad B = 0.$$

Dus: $y_p(t) = -\frac{1}{4}t\cos(2t)$.

Als

$$y''(t) + y(t) = t\cos t,$$

dan is $y_h(t) = c_1\cos t + c_2\sin t$. In dat geval zouden we dus $y_p(t) = At\cos t + Bt\sin t$ moeten kiezen om een lineaire combinatie van $\cos t$ en $\sin t$ in het rechterlid te krijgen. Nu proberen we dus $y_p(t) = (At^2 + Bt)\cos t + (Ct^2 + Dt)\sin t$. Dan volgt:

$$y_p'(t) = (-At^2 - Bt + 2Ct + D)\sin t + (Ct^2 + Dt + 2At + B)\cos t$$

en

$$y_p''(t) = (-At^2 - Bt + 2Ct + D + 2Ct + D + 2A)\cos t + (-Ct^2 - Dt - 2At - B - 2At - B + 2C)\sin t.$$

Invullen geeft dan

$$(4Ct + 2A + 2D)\cos t + (-4At - 2B + 2C)\sin t = t\cos t$$

en dus: $4C = 1$, $2A + 2D = 0$, $-4A = 0$ en $-2B + 2C = 0$ oftewel $A = D = 0$ en $B = C = \frac{1}{4}$. Dus: $y_p(t) = \frac{1}{4}t^2\sin t + \frac{1}{4}t\cos t$.

Als $g(t)$ een polynoom is, dan kiezen we in principe een polynoom (van dezelfde graad) als particuliere oplossing. Bijvoorbeeld: voor

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = t^2$$

geldt, dat $y_h(t) = c_1e^t + c_2e^{2t}$ en kunnen we $y_p(t) = At^2 + Bt + C$ proberen. Invullen geeft dan: $2A - 3(2At + B) + 2(At^2 + Bt + C) = t^2$ oftewel $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{3}{2}$ en $C = \frac{7}{4}$. Dus: $y_p(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{7}{4}$.

Dit gaat echter mis als een deel van zo'n polynoom voorkomt in de algemene oplossing $y_h(t)$ van de bijbehorende homogene differentiaalvergelijking. Bijvoorbeeld: als

$$y''(t) - 3y'(t) = t^2,$$

dan is $y_h(t) = c_1 + c_2e^{3t}$. De constante c_1 is een polynoom van de graad nul. Als de bekende term $g(t)$ een constante zou zijn, dan heeft het geen zin zin om een constante als particuliere oplossing te proberen. We zouden dan een factor t moeten toevoegen en dus een polynoom van de graad één moeten proberen. In dit geval ($g(t) = t^2$) kiezen we daarom $y_p(t) = At^3 + Bt^2 + Ct$, een polynoom van de graad drie. Merk op, dat we de eventuele constante D achterwege kunnen laten omdat deze al in $y_h(t)$ voorkomt. Invullen geeft nu $6At + 2B - 3(3At^2 + 2Bt + C) = t^2$ oftewel $A = -\frac{1}{9}$, $B = -\frac{1}{9}$ en $C = -\frac{2}{27}$. Dus: $y_p(t) = -\frac{1}{9}t^3 - \frac{1}{9}t^2 - \frac{2}{27}t$.

Merk op, dat vormen zoals t^ne^{at} horen bij de oplossing $r = a$ van de karakteristieke vergelijking. Steeds als we een extra *oplossing* nodig hebben met e^{at} voegen we een factor t toe. Dit begint bij de algemene oplossing $y_h(t)$ van de gereduceerde (homogene) differentiaalvergelijking. Als de karakteristieke vergelijking een dubbel nulpunt $r = a$ heeft, dan geldt dat $y_h(t) = c_1e^{at} + c_2te^{at}$. Als e^{at} ook in de bekende term $g(t)$ voorkomt, dan moeten we steeds meer factoren t toevoegen in de particuliere oplossing. Deze is dan de vorm: een polynoom maal e^{at}.

Evenzo horen polynomen bij de oplossing $r = 0$ van de karakteristieke vergelijking. In dat geval ontbreekt de e-macht omdat $e^{0t} = 1$. Verder is het principe gelijk.

Bij hogere orde differentiaalvergelijkingen gelden dezelfde principes. Bijvoorbeeld: als

$$y^{(4)}(t) - 4y''(t) = t^2,$$

dan is $y_h(t) = c_1 + c_2t + c_3e^{2t} + c_4e^{-2t}$. Omdat er dus een polynoom van de graad één voorkomt in $y_h(t)$ zouden we al de vorm At^2 nodig hebben om een constante in het rechterlid te krijgen. In dit geval kiezen we daarom $y_p(t) = At^4 + Bt^3 + Ct^2$, een polynoom van de graad vier waarbij de vorm $Dt + E$ achterwege kan blijven omdat deze reeds in $y_h(t)$ voorkomt. Invullen geeft dan $24A - 4(12At^2 + 6Bt + 2C) = t^2$ oftewel $A = -\frac{1}{48}$, $B = 0$ en $C = -\frac{1}{16}$. Dus: $y_p(t) = -\frac{1}{48}t^4 - \frac{1}{16}t^2$.

Ga na dat voor

$$y^{(4)} - 4y^{(3)} + 4y''(t) = t^2 + te^{2t},$$

geldt dat $y_h(t) = c_1 + c_2t + c_3e^{2t} + c_4te^{2t}$. Voor een particuliere oplossing kiezen we dan

$$y_p(t) = At^4 + Bt^3 + Ct^2 + (Dt^3 + Et^2)e^{2t}.$$

Invullen leidt dan uiteindelijk tot $A = \frac{1}{48}$, $B = \frac{1}{12}$, $C = \frac{3}{16}$, $D = \frac{1}{24}$ en $E = -\frac{1}{8}$. Dus:

$$y_p(t) = \frac{1}{48}t^4 + \frac{1}{12}t^3 + \frac{3}{16}t^2 + \left(\frac{1}{24}t^3 - \frac{1}{8}t^2\right)e^{2t}.$$

Methode van variatie van de constanten

Als de bekende term $g(t)$ een gedaante heeft waardoor we de vorm van de *particuliere* oplossing $y_p(t)$ niet kunnen voorspellen, dan werkt de methode van onbepaalde coëfficiënten niet. In dat geval kunnen we de methode van variatie van de constanten toepassen. Deze methode werkt in principe altijd, maar geeft wel vaak lastig rekenwerk. In het geval dat beide methoden toepasbaar zijn, verdient de methode van onbepaalde coëfficiënten altijd de voorkeur.

De methode kan goed worden geïllustreerd aan de hand van het voorbeeld:

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^{3t}.$$

Merk op, dat $y_h(t) = c_1e^t + c_2e^{2t}$. We kunnen nu een oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking proberen te vinden van de vorm $y(t) = u_1(t)e^t + u_2(t)e^{2t}$. Deze vorm ontstaat uit $y_h(t)$ door de constanten c_1 en c_2 te vervangen door de functies $u_1(t)$ en $u_2(t)$; dit verklaart de benaming *variatie van de constanten*.

We streven nu naar eerste orde differentiaalvergelijkingen voor $u_1(t)$ en $u_2(t)$ en dat kan altijd alsvolgt:

$$y'(t) = \underbrace{u_1'(t)e^t + u_2'(t)e^{2t}}_{=0} + u_1(t)e^t + 2u_2(t)e^{2t}.$$

We nemen aan dat we $u_1'(t)e^t + u_2'(t)e^{2t} = 0$, zodat de afgeleiden van $u_1(t)$ en $u_2(t)$ verdwijnen. Het zal blijken dat dit altijd kan! Nu volgt dat

$$y''(t) = u_1'(t)e^t + 2u_2'(t)e^{2t} + u_1(t)e^t + 4u_2(t)e^{2t}.$$

Invullen geeft dan

$$u_1'(t)e^t + 2u_2'(t)e^{2t} + u_1(t)e^t + 4u_2(t)e^{2t} - 3\left\{u_1(t)e^t + 2u_2(t)e^{2t}\right\} + 2\left\{u_1(t)e^t + u_2(t)e^{2t}\right\} = e^{3t}$$

oftewel

$$u_1'(t)e^t + 2u_2'(t)e^{2t} = e^{3t}.$$

Alle termen met $u_1(t)$ en $u_2(t)$ vallen weg; alleen de termen met $u_1'(t)$ en $u_2'(t)$ blijven over. Dat is altijd het geval: immers, als $u_1(t)$ en $u_2(t)$ constanten zouden zijn, dan zijn $u_1'(t)$ en $u_2'(t)$ beide nul en zou $y(t)$ een oplossing zijn van de gereduceerde (homogene) differentiaalvergelijking. Met andere woorden: bij het invullen zou het rechterlid nul worden. We hebben nu dus:

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_1'(t)e^t + u_2'(t)e^{2t} & = & 0 \\ u_1'(t)e^t + 2u_2'(t)e^{2t} & = & e^{3t} \end{array}\right. \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^t & 2e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Merk op, dat de determinant van deze matrix precies de determinant van Wronski of de Wronskiaan van de oplossingen e^t en e^{2t} van de gereduceerde (homogene) differentiaalvergelijking is. Aangezien die oplossingen lineair onafhankelijk zijn (gekozen), is die determinant (altijd) ongelijk aan nul. Het stelsel heeft daarom precies één oplossing voor $u_1'(t)$ en $u_2'(t)$. In dit geval volgt

$$u_1'(t) = -e^{2t} \quad\text{en}\quad u_2'(t) = e^t \quad\Longrightarrow\quad u_1(t) = -\tfrac{1}{2}e^{2t} + c_1 \quad\text{en}\quad u_2(t) = e^t + c_2.$$

Tenslotte volgt dat

$$y(t) = u_1(t)e^t + u_2(t)e^{2t} = -\tfrac{1}{2}e^{3t} + c_1e^t + e^{3t} + c_2e^{2t} = \tfrac{1}{2}e^{3t} + c_1e^t + c_2e^{2t}.$$

Merk op, dat de methode van onbepaalde coëfficiënten op pagina 1 hier veel eenvoudiger is.

In het geval dat (bijvoorbeeld)

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \frac{e^{-t}}{t^2}, \quad t > 0$$

kan de methode van onbepaalde coëfficiënten niet worden toegepast. De methode van variatie van de constanten werkt wel: merk op, dat $y_h(t) = c_1e^{-t} + c_2te^{-t}$. Stel dan

$$y(t) = u_1(t)e^{-t} + u_2(t)te^{-t}.$$

Dan volgt:

$$y'(t) = \underbrace{u_1'(t)e^{-t} + u_2'(t)te^{-t}}_{=0} - u_1(t)e^{-t} + u_2(t)(-t+1)e^{-t}$$

en

$$y''(t) = -u_1'(t)e^{-t} + u_2'(t)(-t+1)e^{-t} + u_1(t)e^{-t} + u_2(t)(t-2)e^{-t}.$$

Invullen levert dan: $-u_1'(t)e^{-t} + u_2'(t)(-t+1)e^{-t} = \dfrac{e^{-2}}{t^2}$. Dus:

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_1'(t)e^{-t} + u_2'(t)te^{-t} & = & 0 \\ -u_1'(t)e^{-t} + u_2'(t)(-t+1)e^{-t} & = & \dfrac{e^{-t}}{t^2} \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ -e^{-t} & (-t+1)e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{e^{-t}}{t^2} \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt nu (ga na!)

$$u_1'(t) = -\frac{1}{t} \quad \text{en} \quad u_2'(t) = \frac{1}{t^2} \quad \Longrightarrow \quad u_1(t) = -\ln t + k_1 \quad \text{en} \quad u_2(t) = -\frac{1}{t} + k_2.$$

Dus:

$$y(t) = u_1(t)e^{-t} + u_2(t)te^{-t} = -e^{-t}\ln t + k_1e^{-t} - e^{-t} + k_2te^{-t} = -e^{-t}\ln t + c_1e^{-t} + c_2te^{-t}.$$

Merk op dat

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) \quad \text{met} \quad y_p(t) = -e^{-t}\ln t \quad \text{en} \quad y_h(t) = c_1e^{-t} + c_2te^{-t}.$$

De methode werkt ook voor hogere orde differentiaalvergelijkingen, zoals

$$y^{(3)}(t) + y'(t) = \frac{1}{\cos t}, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

Merk op, dat $y_h(t) = c_1 + c_2\cos t + c_3\sin t$. We nemen nu

$$y(t) = u_1(t) + u_2(t)\cos t + u_3(t)\sin t.$$

Dan volgt:

$$y'(t) = \underbrace{u_1'(t) + u_2'(t)\cos t + u_3'(t)\sin t}_{=0} - u_2(t)\sin t + u_3(t)\cos t,$$

$$y''(t) = \underbrace{-u_2'(t)\sin t + u_3'(t)\cos t}_{=0} - u_2(t)\cos t - u_3(t)\sin t$$

en

$$y^{(3)}(t) = -u_2'(t)\cos t - u_3'(t)\sin t + u_2(t)\sin t + u_3(t)\cos t.$$

Invullen geeft dan $-u_2'(t)\cos t - u_3'(t)\sin t = \dfrac{1}{\cos t}$. Dus:

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_1'(t) + u_2'(t)\cos t + u_3'(t)\sin t & = & 0 \\ -u_2'(t)\sin t + u_3'(t)\cos t & = & 0 \\ -u_2'(t)\cos t - u_3'(t)\sin t & = & \dfrac{1}{\cos t} \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \\ 0 & -\cos t & -\sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \\ u_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{\cos t} \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt (ga na!) dat

$$u_1'(t) = \frac{1}{\cos t}, \quad u_2'(t) = -1 \quad \text{en} \quad u_3'(t) = -\frac{\sin t}{\cos t}$$

en dus

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \int \frac{dt}{\cos t} = \int \frac{\cos t}{\cos^2 t}\, dt \int \frac{d\sin t}{1-\sin^2 t} = \int \frac{du}{1-u^2} = \int \frac{du}{(1-u)(1+u)} \\ &= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\right) du = \frac{1}{2}\Big(\ln|1+u| - \ln|1-u|\Big) + c_1 \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + c_1 = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right| + c_1 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right) + c_1, \end{aligned}$$

$u_2(t) = -t + c_2$ en $u_3(t) = \ln(\cos t) + c_3$. De oplossing is dus

$$\begin{aligned} y(t) &= u_1(t) + u_2(t)\cos t + u_2(t)\sin t \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right) + c_1 - t\cos t + c_2\cos t + \sin t\ln(\cos t) + c_3\sin t \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right) - t\cos t + \sin t\ln(\cos t) + c_1 + c_2\cos t + c_3\sin t. \end{aligned}$$

Merk op dat $y(t) = y_p(t) + y_h(t)$ met

$$y_p(t) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right) - t\cos t + \sin t\ln(\cos t) \quad \text{en} \quad y_h(t) = c_1 + c_2\cos t + c_3\sin t.$$