1. We merken op dat het n^{de} orde Taylorpolynoom met steunpunt $x = c$ van een $(n+1)$ maal differentieerbare functie $f(x)$ is gegeven als

$$P_n(x) = f(c) + (x-c)f'(c) + \frac{(x-c)^2}{2!}f''(c) + \cdots + \frac{(x-c)^n}{n!}f^{(n)}(c).$$

De schatting van de fout in $x = d$ is dan $\mid P_n(d) - f(d) \mid = \mid R_n(d) \mid$, waarbij

$$R_n(x) = \frac{(x-c)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),$$

voor een ξ tussen x en c.

Het tweede orde Taylor polynoom van $f(x) = x^3$ rond het steunpunt $x = 1$ is dan gelijk aan

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(1) + (x-1)f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2!}f''(1) = \\ &= 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2. \end{aligned}$$

Onmiddellijk volgt dat

$$P_2(0.5) = 0.25.$$

De schatting van de fout in $x = 0.5$ wordt gegeven door

$$\mid R_2(0.5) \mid = \mid \frac{(0.5-1)^3}{3!}f'''(\xi) \mid = \mid \frac{(0.5-1)^3}{3!}6 \mid = 0.125$$

De 'echte' fout kunnen we ook gemakkelijk bepalen door $\mid P_2(0.5) - f(0.5) \mid$ uit te rekenen. Er volgt dat de 'echte' fout gelijk is aan onze geschatte fout.

2. In dit voorbeeld geldt:

$$f(x) = x^2 - x + 1,$$
$$f'(x) = 2x - 1,$$
$$f''(x) = 2.$$

Hieruit volgt:

$$P_2(x) = 1 + (x-1)\cdot 1 + \frac{(x-1)^2}{2}\cdot 2.$$

Merk op dat de fout gelijk aan nul is. Dit kan op twee manieren afgeleid worden:

- Uitwerken geeft: $P_2(x) = x^2 - x + 1$.
- De fout wordt gegeven door $\frac{(x-1)^3}{3!}f'''(\xi)$. Echter $f'''(\xi) = 0$ voor alle ξ.

Deze eigenschap geldt algemeen. Als f een polynoom is van de graad n, dan is $f(x) = P_n(x)$ voor alle x.

3. Merk eerst op dat $f^{(i)}(x) = e^x$ voor alle $i \in \mathbb{N}$. Er volgt dat $f^{(i)}(0) = 1$ voor alle $i \in \mathbb{N}$. Dus het n^{de} orde Taylorpolynoom van $f(x) = e^x$ rond $x = 0$ is

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n.$$

De fout $R_n(x)$ voor $x \in [0, 0.5]$ moet kleiner zijn dan 10^{-6}. We zoeken n dus zodanig dat $R_n(x) \leq 10^{-6}$ voor $x \in [0, 0.5]$, waarbij

$$R_n(x) = \frac{(x)^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi},$$

voor een ξ tussen 0 en x.

Om ervoor te zorgen dat $R_n(x)$ op het gehele interval kleiner is dan 10^{-6} moeten we n vinden zodanig dat

$$\frac{(0.5)^{n+1}}{(n+1)!}e^{0.5} \leq 10^{-6}. \tag{1}$$

Ga dit zelf na. Het 'proberen' van enkele n, bv. $n = 5, 6, 7, \ldots$ geeft dat $n = 7$ de kleinste is waarvoor aan voorwaarde (1) wordt voldaan.

4. De functie $f(x) = \cos x$ kan worden benaderd door het polynoom $P(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$. Wanneer we als steunpunt $x = 0$ nemen en vervolgens het derde orde Taylorpolynoom bepalen, blijkt deze gelijk te zijn aan $P(x)$. Zoals bekend zijn de eerste, tweede en derde afgeleide van $f(x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x \\ f'(x) &= -\sin x \\ f''(x) &= -\cos x \\ f'''(x) &= \sin x. \end{aligned}$$

Het derde orde Taylorpolynoom van $f(x) = \cos x$ rond $x = 0$ is

$$\begin{aligned} P_3(x) &= \cos 0 - x\sin 0 + \frac{x^2}{2}\cos 0 - \frac{x^3}{3!}\sin 0 = \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 = P(x). \end{aligned}$$

Een bovengrens voor de fout is

$$R_4(x) = \frac{1}{4!}x^4 f^{(iv)}(\xi) = \frac{1}{4!}x^4 \cos\xi,$$

voor een ξ tussen 0 en x. Omdat we een *bovengrens* willen vinden, zoeken we dus een bovengrens van $R_4(x)$. Merk op dat $|\cos\xi| \leq 1$ en $x^4 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^4$ voor $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Een bovengrens voor $|R_4(x)|$ is

$$\frac{1}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 1 = 0.0026.$$

5. Omdat $x = \frac{1}{3}$ volgt dat $fl(x) = 0.333 \cdot 10^0$, omdat we met drie cijfers rekenen. Evenzo volgt voor $y = \frac{5}{7}$ dat $fl(y) = 0.714 \cdot 10^0$.

   Ter illustratie zullen we $fl(fl(x) + fl(y))$ en $x + y$ berekenen en vervolgens de afrondfout. Aldus, er volgt

$$fl(x) + fl(y) = (0.333 + 0.714) \cdot 10^0 = 1.047 \cdot 10^0.$$

   Dus $fl(fl(x) + fl(y))$ is gelijk aan $1.05 \cdot 10^0$; we rekenen immers met 3 cijfers. De afrondfout, ook wel absolute fout, wordt gegeven door

$$\mid fl(fl(x) + fl(y)) - (x + y) \mid = \mid 1.05 \cdot 10^0 - \frac{22}{21} \mid = 2.38 \cdot 10^{-3}.$$

   Op analoge wijze kunnen de overige berekeningen met floating point getallen ook worden gemaakt. De antwoorden zijn in onderstaande tabel gegeven.

$\circ$	$fl(x \circ y)$	$x \circ y$	absolute fout
+	$0.105 \cdot 10$	$\frac{22}{21}$	$2.38 \cdot 10^{-3}$
-	$-0.381 \cdot 10^0$	$-\frac{8}{21}$	$0.48 \cdot 10^{-4}$
*	$0.238 \cdot 10^0$	$\frac{5}{21}$	$0.95 \cdot 10^{-4}$
/	$0.466 \cdot 10^0$	$\frac{7}{15}$	$0.66 \cdot 10^{-3}$

6. Voor de eerste uitdrukking is de absolute fout 0.327 en de relatieve fout 0.195. Voor de tweede uitdrukking is de absolute fout 0.003 en de relatieve fout 1.79×10^{-3}.

7. Schrijf de definitie op van $O(x^p)$: $|f(x)| \leq M|x|^p$ als $|x| \leq r$. We kunnen dit ook schrijven als: $|f(x)| \leq M|x|^{p-s}|x|^s$ als $|x| \leq r$. Omdat $p - s \geq 0$ volgt dan $|f(x)| \leq M_1|x|^s$ als $|x| \leq r$, waarbij $M_1 = Mr^{p-s}$.

   Op dezelfde manier kan de tweede bewering bewezen worden. Er geldt:

$$|f(x)| \leq M_f|x|^p \text{ als } |x| \leq r_f$$

   en

$$|g(x)| \leq M_g|x|^q \text{ als } |x| \leq r_g.$$

   Neem aan dat $p < q$ dan geldt $\min\{p, q\} = p$. Definieer verder $r_{f+g} = \min\{r_f, r_g\}$, dan geldt:

$$|f(x) + g(x)| \leq M_f|x|^p + M_g|r_{f+g}|^{q-p}|x|^p \text{ als } |x| \leq r_{f+g}.$$

   Hiermee is de bewering bewezen immers: $M_{f+g} = M_f + M_g|r_{f+g}|^{q-p}$.

8. Lineaire interpolatie geeft: $0.25 \cos(0) + 0.75 \cos(0.6) = 0.869$. De fout is 0.0354.