1. De numerieke oplossing is gelijk aan: $u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = 1, u_4 = 1, u_5 = \alpha$. Merk op dat de oplossing in het inwendige niet afhangt van de waarde van α. Dit is geen goede discretisatie. Beter is te kiezen voor een upwind discretisatie. De discretisatiematrix hiervan is:

$$25 * \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Neem $h = \frac{1}{n+1}$, en $r_i = ih + 1$. De eerste vergelijking is:

$$-\frac{1}{h^2}\left(\frac{1}{r_{1\frac{1}{2}}}(u_2 - u_1) - \frac{1}{r_{\frac{1}{2}}}u_1\right) = 1 + \frac{1}{h^2 r_{\frac{1}{2}}}.$$

De i^e vergelijking is:

$$-\frac{1}{h^2}\left(\frac{1}{r_{i+\frac{1}{2}}}(u_{i+1} - u_i) - \frac{1}{r_{i-\frac{1}{2}}}(u_i - u_{i-1})\right) = 1.$$

De n^e vergelijking is:

$$-\frac{1}{h^2}\left(\frac{1}{r_{n+\frac{1}{2}}}(-u_n) - \frac{1}{r_{n-\frac{1}{2}}}(u_n - u_{n-1})\right) = 1 + \frac{10}{h^2 r_{n+\frac{1}{2}}}.$$

Merk op dat $A_{i,i-1} = -\frac{1}{r_{i-\frac{1}{2}}}$ en $A_{i-1,i} = -\frac{1}{r_{i-\frac{1}{2}}}$, dus de matrix is symmetrisch. Als je de term $-\frac{d}{dr}(\frac{1}{r}\frac{dy}{dr})$ is uitgedifferentieerd had in: $\frac{1}{r^2}\frac{dy}{dr} - \frac{1}{r}\frac{d^2y}{dr^2}$ en daarna gediscretiseerd, dan zou de matrix niet symmetrisch geweest zijn. Geen goed idee dus.

3. $n = 2$ en $h = 1$.

   (a) De matrix is

   $$K = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ en } \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   De eigenwaarden zijn $\lambda_1 = -3$ en $\lambda_2 = -1$.

   (b) Voor $k \leq \frac{2}{3}$

   (c) Voor $k = \frac{1}{2}$ is de oplossing $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ en voor $k = 1$ is de oplossing $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (d) Voor $k = 1$ is de oplossing $\begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}$