1. Resultaten:

h	$\frac{\sin(1+h)-\sin(1-h)}{2h}$	totale fout	geschatte fout
0.1	0.53940	0.9×10^{-3}	0.89×10^{-3}
0.05	0.54007	0.225×10^{-3}	0.22×10^{-3}
0.025	0.54024	0.563×10^{-4}	0.55×10^{-4}

Om de fout te schatten kun je gebruik maken van de formules

$$f'(x) - Q(h) = Kh^{\alpha}$$

$$f'(x) - Q(\frac{h}{2}) = K(\frac{h}{2})^{\alpha}$$

$$f'(x) - Q(\frac{h}{4}) = K(\frac{h}{4})^{\alpha}$$

Invullen in de formules geeft

$$2^{\alpha} = \frac{Q(\frac{h}{2}) - Q(h)}{Q(\frac{h}{4}) - Q(\frac{h}{2})} = 3.94,$$

zodat $\alpha = 2$. Dit invullen in de eerste twee vergelijkingen en aftrekken geeft $Kh^2 = \frac{4}{3}(Q(\frac{h}{2}) - Q(h))$. Hieruit volgt $K = 0.89 \times 10^{-1}$, waarmee de foutschattingen berekend zijn.

2. De *modified Euler-methode* benadert de oplossing van een beginwaarde probleem $y' = f(t, y)$ als volgt:

   Stel w_n, de benadering/waarde van $y(t_n)$, is bekend. Dan wordt w_{n+1}, de benadering van $y(t_{n+1})$ als volgt bepaald:

$$\begin{aligned} \overline{w}_{n+1} &= w_n + hf(t_n, w_n), \\ w_{n+1} &= w_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, w_n) + f(t_{n+1}, \overline{w}_{n+1})\right). \end{aligned}$$

   In deze opgave is het beginwaarde probleem

$$y' = 1 + (t - y)^2,$$

   gedefineerd op het tijdsinterval $[2, 3]$ met beginvoorwaarde $y(2) = 1$ (De functie $f(t, y)$ is nu gelijk aan $1 + (t - y)^2$). De exacte oplossing van dit probleem is

$$y(t) = t + \frac{1}{1 - t}.$$

   Inderdaad geldt dat deze oplossing aan de DV voldoet en dat $y(2) = 1$.

Met een (tijd)stapgrootte $h = 0.5$ volgt dat voor $2 \leq t \leq 3$ de volgende w_i moeten worden bepaald:

$$\begin{aligned} w_0 &\cong y(2), \\ w_1 &\cong y(2.5) \quad \text{en} \\ w_2 &\cong y(3). \end{aligned}$$

Onmiddellijk volgt dat $w_0 = y(2) = 1$. De fout in dit punt is dus gelijk aan nul.

De benadering van $y(t)$ op het tijdstip $t = 2.5$ volgt met de modified Euler-methode,

$$\begin{aligned} \overline{w}_1 &= w_0 + hf(t_0, w_0) = \\ &= 1 + 0.5\left(1 + (2-1)^2\right) = \\ &= 1 + 0.5 \cdot 2 = 2, \\ w_1 &= w_0 + \frac{h}{2}\left(f(t_0, w_0) + f(t_1, \overline{w}_1)\right) = \\ &= 1 + 0.25\left(2 + (1 + (2.5-2)^2)\right) = \\ &= 1 + 0.25 \cdot 3.25 = 1.8125. \end{aligned}$$

De exacte oplossing $y(t)$ geeft in $t = 2.5$ de waarde 1.8333. Hieruit volgt dat de fout gelijk is aan 0.0208.

In de tweede stap van de modified Euler-methode verkrijgen we

$$\begin{aligned} \overline{w}_2 &= 2.5488, \\ w_2 &= 2.4816. \end{aligned}$$

De exacte oplossing geeft in $t = 3$ de waarde $y(3) = 2.5$. De fout is dus 0.0184. De resultaten zijn samengevat in onderstaande tabel.

i	tijdstip t	$y(t)$	w_i	fout
0	2	1	1	0
1	2.5	1.8333	1.8125	0.0208
2	3	2.5	2.4816	0.0184

3. De oplossingen zijn:

$$q_1^{\pm} = (-1/h \pm \sqrt{1/h^2 + 4(q_0/h + 1)})/2$$

Merk op dat er nu twee oplossingen zijn. We moeten er één kiezen. We kunnen dit op twee manieren doen: wiskundig of natuurkundig. Wiskundig gezien blijkt dat $\lim_{h\to 0} q_1^+ = 0$, terwijl $\lim_{h\to 0} q_1^- = -\infty$. We kiezen dan voor q_1^+. Op grond van de fysica kiezen we ook voor de positieve oplossing.

4. De numerieke oplossing berekend met de methode van Euler is gelijk aan 0. Uit de foutschatting volgt dat de lokale afbreekfout kleiner is dan $5h$, dus $|y_1 - w_1| = h|\tau_1(h)| \leq 0.5$. Controle geeft $y(0.1) - w_1 = \frac{1}{e} - 0 = 0.37$

5. Euler Forward $w_1 = 1 + h$
   Modified Euler $w_1 = 1 + h$

   Beide methoden geven hetzelfde antwoord omdat y(x) = x. Dit invullen in de foutschattingen geeft dat voor beide methoden de fout gelijk is aan 0.