1. (a) De methode die in deze opgave wordt gebruikt is als volgt gedefinieerd

$$\begin{aligned} u^* &= u_n + \beta h f(t_n, u_n) & (1) \\ u_{n+1} &= u^* + (1-\beta) h f(t_n + \beta h, u^*) & (2) \end{aligned}$$

We gaan te werk als in het bepalen van de lokale afbreekfout van de Modified Euler methode op blz. 81 van het dictaat. Als eerste vervangen we de numerieke waarde u_n door de exacte waarde y_n, dus

$$\begin{aligned} z^* &= y_n + \beta h f(t_n, y_n) & (3) \\ y_{n+1} &= z^* + (1-\beta) h f(t_n + \beta h, z^*) & (4) \end{aligned}$$

We beginnen met de Taylorontwikkeling van $f(t_n+\beta h, z^*)$ rond het punt (t_n, y_n):

$$\begin{aligned} f(t_n + \beta h, z^*) &= f(t_n, u_n) + \beta h (f_t)_n + (z^* - y(t_n))(f_y)_n + \frac{1}{2}\beta^2 h^2 (f_{tt})_n + \\ &+ \frac{1}{2}(z^* - y(t_n))^2 (f_{yy})_n + \beta h (z^* - y(t_n))(f_{ty})_n. \qquad (5) \end{aligned}$$

Met behulp van (3) volgt dat (5) gelijk wordt aan

$$f(t_n + \beta h, z^*) = f(t_n, y_n) + \beta h (f_t + f f_y) + \mathcal{O}(h^2). \qquad (6)$$

Als we nu vervolgens (6) substitueren in (2) verkrijgen we

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= y_n + \beta h f(t_n, y_n) + (1-\beta) h f(t_n, y_n) + (1-\beta)\beta h^2 (f_t + f f_t)_n + \mathcal{O}(h^3) = \\ &= y_n + h f(t_n, y_n) + (1-\beta)\beta h^2 (f_t + f f_t)_n + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned}$$

De Taylorontwikkeling van de exacte oplossing y_{n+1} wordt gegeven door

$$y_{n+1} = y_n + h y_n' + \frac{1}{2} h^2 y_n'' + \mathcal{O}(h^3).$$

Gebruikmakend van het feit dat $y' = f(t, y)$ volgt dat $y_{n+1} - z_{n+1}$ gelijk is aan

$$y_{n+1} - z_{n+1} = \left(\frac{1}{2}h^2 - \beta(1-\beta)h^2\right) y_n'' + \mathcal{O}(h^3) = \mathcal{O}(h^2).$$

De laatste gelijkheid volgt door het feit dat $\frac{1}{2} - \beta(1-\beta)$ ongelijk aan nul is voor alle β. Nu volgt eenvoudig dat de afbreekfout τ_{n+1} door

$$\frac{y_{n+1} - z_{n+1}}{h} = \mathcal{O}(h).$$

(b) De versterkingsfactor wordt bepaald door de methode toe te passen op de testvergelijking $y' = \lambda y$. We verkrijgen met $f(t_n, u_n)$ gelijk aan λu_n in (1) en (2):

$$\begin{aligned} u^* &= u_n + \beta h \lambda u_n \\ u_{n+1} &= u^* + (1-\beta) h \lambda u^*. & (7) \end{aligned}$$

Substitueren van u^* in (7) geeft

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n + \beta h\lambda u_n + (1-\beta)h\lambda(u_n + \beta h\lambda u_n) = \\
&= \left(1 + \beta h\lambda + (1-\beta)h\lambda + \beta(1-\beta)(h\lambda)^2\right) u_n = \\
&= \left(1 + h\lambda + \beta(1-\beta)(h\lambda)^2\right) u_n = \\
&= Q(h\lambda)u_n.
\end{aligned}$$

De versterkingsfactor is $Q(h\lambda) = 1 + h\lambda + \beta(1-\beta)(h\lambda)^2$.

(c) De niet-lineaire differentiaal vergelijking $y' = f(y)$ met $f(y) = 2y - 4y^2$ moet worden gelineariseerd rond $y = \frac{1}{2}$. Er volgt dat de linearisatie van $f(y)$ rond $y = \frac{1}{2}$ gegeven is als

$$f(y) \approx f(\frac{1}{2}) + (y - \frac{1}{2})f'(\frac{1}{2}) = -2y + 1.$$

De gelineariseerde differentiaalvergelijking is dus $y' = -2y+1$. Voor stabiliteit is het voldoende om te kijken naar de vergelijking $y' = 6y$. Dit is de testvergelijking met $\lambda = -2$.

De testvergelijking is stabiel als geldt:

$$|Q(h\lambda)| \leq 1 \quad \text{voor } \lambda = 6 \text{ en } \beta = \frac{1}{2}.$$

Invullen geeft dat voor de stapgrootte h geldt dat deze moet voldoen aan de ongelijkheid

$$-1 \leq 1 - 2h + h^2 \leq 1.$$

Aan de rechterongelijkheid wordt voldaan als $h \leq 2$. Aan de linker ongelijkheid voldoet deze voorwaarde ook (en we vinden geen strictere voorwaarde). De conclusie is dat de methode stabiel is in dit punt als $h \leq 2$.

2. (i) De Trapeziumregel voor het oplossen van een beginwaardeprobleem is gegeven als

$$w_{n+1} = w_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, w_n) + f(t_{n+1}, w_{n+1})\right). \tag{8}$$

Merk daarbij op dat dit een impliciete methode is om de oplossing van het beginwaarde probleem $y' = f(t, y)$ te benaderen.

De versterkingsfactor $Q(h\lambda)$ wordt als volgt afgeleid. Beschouw de testvergelijking $y' = \lambda y$. Toepassen van de Trapeziumregel op deze testvergelijking geeft een $Q(h\lambda)$ zodanig dat

$$w_{j+1} = Q(h\lambda)w_j.$$

Toepassen van (8) op de testvergelijking $y' = \lambda y$ geeft:

$$w_{j+1} = w_j + \frac{h}{2}\left(\lambda w_j + \lambda w_{j+1}\right) \tag{9}$$

Hergroeperen van w_{j+1} en w_j in (9) levert

$$\left(1 - \frac{h}{2}\lambda\right) w_{j+1} = \left(1 + \frac{h}{2}\lambda\right) w_j.$$

Er volgt dat

$$w_{j+1} = \frac{1 + \frac{h}{2}\lambda}{1 - \frac{h}{2}\lambda} w_j,$$

en dus is

$$Q(h\lambda) = \frac{1 + \frac{h}{2}\lambda}{1 - \frac{h}{2}\lambda}.$$

(ii) Op blz. 80 van het dictaat vinden we dat de afbreekfout gelijk is aan

$$\tau_{j+1} = \frac{y_{j+1} - Q(h\lambda)}{h}.$$

De exacte oplossing van de testvergelijking wordt gegeven door

$$y_{j+1} = e^{h\lambda} y_j.$$

Combineren van deze beide resultaten geeft dat de afbreekfout van de testvergelijking wordt bepaald door het verschil van de exponentiële functie en de versterkingsfactor $Q(h\lambda)$, nl.

$$\tau_{j+1} = \frac{e^{h\lambda} - Q(h\lambda)}{h} y_j. \tag{10}$$

Het verschil tussen de exponentiële functie en de versterkingsfactor berekenen we als volgt:

(1) Taylorontwikkeling van $e^{h\lambda}$

(2) Taylorontwikkeling van $\frac{1}{1-\frac{h}{2}\lambda}$ vermenigvuldigt met $1 + \frac{h}{2}\lambda$

(3) Aftrekken: (1) $-$ (2)

De Taylorontwikkeling van $e^{h\lambda}$ met steunpunt 0 is:

$$e^{h\lambda} = 1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2} + \mathcal{O}(h^3). \tag{11}$$

De Taylorontwikkeling van $\frac{1}{1-\frac{h}{2}\lambda}$ met steunpunt 0 is:

$$\frac{1}{1 - \frac{h}{2}\lambda} = 1 + \frac{1}{2}h\lambda + \frac{1}{4}h^2\lambda^2 + \mathcal{O}(h^3). \tag{12}$$

Met behulp van (12) volgt dat $\frac{1+\frac{h}{2}\lambda}{1-\frac{h}{2}\lambda}$ gelijk is aan

$$\frac{1 + \frac{h}{2}\lambda}{1 - \frac{h}{2}\lambda} = 1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2 + \mathcal{O}(h^3). \tag{13}$$

Om nu $e^{h\lambda} - Q(h\lambda)$ te bepalen, trekken we (13) af van (11). Er volgt

$$e^{h\lambda} - Q(h\lambda) = \mathcal{O}(h^3). \tag{14}$$

De afbreekfout vinden we nu door (14) in te vullen in (10). We vinden dan

$$\tau_{j+1} = \mathcal{O}(h^2).$$

(iii) In paragraaf 6.5 (Stability of initial-value problems) wordt afgeleid dat een numerieke methode stabiel is dan en slechts dan als

$$|Q(h\lambda)| \leq 1.$$

De versterkingsfactor van de Trapeziumregel is

$$Q(h\lambda) = \frac{1 + \frac{h}{2}\lambda}{1 - \frac{h}{2}\lambda}.$$

We moeten dus laten zien dat als $\lambda \leq 0$ er volgt dat $|Q(h\lambda)| \leq 1$ voor alle stapgrootten $h > 0$.
Uit $|Q(h\lambda)| \leq 1$ volgt dat er aan de volgende ongelijkheid moet worden voldaan

$$-1 \leq \frac{1 + \frac{h}{2}\lambda}{1 - \frac{h}{2}\lambda} \leq 1.$$

Bovenstaande ongelijkheid vermenigvuldigen met $1 - \frac{h}{2}\lambda$ geeft

$$-1 + \frac{h}{2}\lambda \leq 1 + \frac{h}{2}\lambda \leq 1 - \frac{h}{2}\lambda. \tag{15}$$

Merk op dat $(1 - \frac{h}{2}\lambda) \geq 0$, dus het teken in de ongelijkheid 'klapt' niet om. We weten dat $\lambda \leq 0$ en moeten dus alleen controleren voor welke waarden voor h aan (15) wordt voldaan.
We beginnen met de linker ongelijkheid in (15), nl. $-1 + \frac{h}{2}\lambda \leq 1 + \frac{h}{2}\lambda$. Als $\lambda \leq 0$, dan voldoet deze ongelijkheid voor alle $h > 0$.
Voor de rechter ongelijkheid van (15), nl. $1 + \frac{h}{2}\lambda \leq 1 - \frac{h}{2}\lambda$, verkrijgen we hetzelfde resultaat. Ook hier geldt dat er aan de ongelijkheid wordt voldaan voor alle $h > 0$.
De conclusie is dat de methode stabiel is voor alle $h > 0$ als $\lambda \leq 0$.

3. We beschouwen het niet-lineaire beginwaardenprobleem $y' = f(t, y)$ met

$$f(t, y) = 1 + (t - y)^2.$$

Om de stabiliteit van Modified Euler in het punt $(t = 2, y = 1)$ te onderzoeken hebben we de volgende resultaten nodig:

- Versterkingsfactor van Modified Euler
- Linearisatie van $f(t, y)$.

De versterkingsfactor van Modified Euler is

$$Q(h\lambda) = 1 + h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2.$$

Zie paragraaf 6.8 van het Dictaat.

De linearisatie van $f(t, y)$ rond het punt $(t, y) = (2, 1)$ is

$$\begin{aligned} f(t,y) &\approx f(2,1) + (t-2)\frac{\partial f}{\partial t}(2,1) + (y-1)\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \\ &= 2 + 2(t-2) - 2(y-1) = -2y + 2t = -2y + g(t). \end{aligned}$$

Het gelineariseerde beginwaardeprobleem is gelijk aan

$$y' = -2y + g(t).$$

Voor stabiliteit is het voldoende om de vergelijking $y' = -2y$ te beschouwen. Merk op dat dit de testvergelijking is met $\lambda = -2$. Modified Euler is stabiel als $|Q(h\lambda)| \leq 1$ met $\lambda = -2$. Dit geeft dat de methode stabiel is als voor de stapgrootte h geldt

$$-1 \leq 1 - 2h + 2h^2 \leq 1.$$

Aan de linker ongelijkheid $-1 \leq 1 - 2h + 2h^2$ wordt voldaan als

$$h \geq 0.$$

De rechter ongelijkheid $\leq 1 - 2h + 2h^2 \leq 1$ als

$$h \leq 1.$$

Dus de stabiliteitsvoorwaarde wordt gegeven door

$$0 \leq h \leq 1.$$

4. Omdat de differentiaalvergelijking lineair is is de hoeveelheid werk per stap voor beide methoden vergelijkbaar. De voorwaartse methode is stabiel als $h < 2$ voor alle keuzen van α. Beide methoden hebben als lokale afbreekfout: $h(\alpha)^2/2$. Dus voor de nauwkeurigheid van beide methoden moet $h \leq \frac{0.02}{\alpha^2}$ zijn. Voor $\alpha = 0.05$ levert dit $h \leq 8$ en voor $\alpha = 10$ geeft dit $h \leq 0.002$. Hieruit volgt dat Euler achterwaarts het beste is voor $\alpha = 0.05$. Voor $\alpha = 10$ is de efficiëntie van beide methoden hetzelfde.