1. We bekijken het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} y_1' &= 1195y_1 + 1995y_2 \\ y_2' &= 1197y_1 - 1997y_2 \end{cases},$$

met als beginvoorwaarden

$$\begin{cases} y_1(0) &= 2 \\ y_2(0) &= -2 \end{cases}.$$

Op tijdsniveau $t = nh$ definieren we de vector

$$\mathbf{w}_{n+1} = \begin{bmatrix} w_1^{(n)} \\ w_2^{(n)} \end{bmatrix}.$$

Euler Voorwaarts is dan

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n + h\mathbf{f}(\mathbf{w}_n),$$

en Euler Achterwaarts

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n + h\mathbf{f}(\mathbf{w}_{n+1}),$$

met

$$\mathbf{f}(\mathbf{w}_n) = \begin{bmatrix} 1195w_1^{(n)} + 1995w_2^{(n)} \\ 1197w_1^{(n)} - 1997w_2^{(n)} \end{bmatrix}.$$

(a) Kies de stapgrootte $h = 0.1$. Met $\mathbf{w}_0 = [2, -2]^T$ volgt dat m.b.v. Euler Voorwaarts $\mathbf{w}_1$ gelijk wordt aan

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= \mathbf{w}_0 + h\mathbf{f}(\mathbf{w}_0) \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} + 0.1 \cdot \begin{bmatrix} 1195 \cdot 2 + 1995 \cdot (-2) \\ 1197 \cdot 2 - 1997 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 640 \\ 636.8 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Met Euler Achterwaarts volgt dat het volgende stelsel vergelijkingen moet worden opgelost:

$$\begin{bmatrix} w_1^{(1)} \\ w_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} + 0.1 \cdot \begin{bmatrix} 1195 & -1995 \\ 1197 & -1997 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^{(1)} \\ w_2^{(1)} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Herschikken in (1) geeft

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} w_1^{(1)} \\ w_2^{(1)} \end{bmatrix} &= \left[\mathbf{I} - 0.1 \cdot \begin{bmatrix} 1195 & -1995 \\ 1197 & -1997 \end{bmatrix}\right]^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{97} \cdot \begin{bmatrix} 220.7 & -199.5 \\ 119.7 & -118.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.23 \\ 4.90 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Merk op: 'De inverse matrix kan worden bepaald met de regel van Kramer'.
De exacte oplossing in $t = 0.1$ wordt gegeven door

$$\begin{bmatrix} y_1(0.1) \\ y_2(0.1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.187 \\ 4.912 \end{bmatrix}.$$

(b) Ga na dat het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} y_1' &= 1195y_1 + 1995y_2 \\ y_2' &= 1197y_1 - 1997y_2 \end{cases},$$

te schrijven is als

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 1195 & -1995 \\ 1197 & -1997 \end{bmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y},$$

waarbij de vector $\mathbf{y}$ gedefinieerd is als

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Zoals in Paragraaf 6.10 wordt afgeleid, is Euler Voorwaarts stabiel als voor alle eigenwaarden geldt:

$$|1 + \lambda_i h| < 1, \quad i = 1, 2, \tag{2}$$

waarbij h de stapgrootte is.
We beginnen met het bepalen van de eigenwaarden van $\mathbf{A}$. Aldus, de eigenwaarden worden bepaald door

$$\begin{vmatrix} 1195 - \lambda & -1995 \\ 1197 & -1997 - \lambda \end{vmatrix}$$

gelijk aan nul te stellen. De volgende vierkantsvergelijking moet dan worden opgelost

$$\begin{array}{ccc} \lambda^2 + 802\lambda & + & 1600 = 0 \\ & \Updownarrow & \\ (\lambda + 2)(\lambda & + & 800) = 0 \\ & \Updownarrow & \\ \lambda = -2 & \text{of} & \lambda = -800. \end{array}$$

Om aan (2) te voldoen is het voldoende om hieraan te voldoen voor $\lambda = -800$. Ga na dat voor $\lambda = -2$ automatisch ook aan (2) wordt voldaan. We zoeken dus alle h zodanig dat

$$|1 - 800\lambda| < 1.$$

Er volgt dat $h < 0.0025$.

(c) We doen dezelfde berekeningen als bij (a). Voor Euler Voorwaarts volgt

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= \mathbf{w}_0 + h\mathbf{f}(\mathbf{w}_0) \\
&= \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} + 0.0001 \cdot \begin{bmatrix} 1195 \cdot 2 + 1995 \cdot (-2) \\ 1197 \cdot 2 - 1997 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 2.64 \\ -1.36 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Voor Euler Achterwaarts moeten we het stelsel

$$\begin{bmatrix} w_1^{(1)} \\ w_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1195 & -0.1995 \\ 0.1197 & -0.1997 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^{(1)} \\ w_2^{(1)} \end{bmatrix} \tag{3}$$

oplossen. Ga na dat de oplossing kan worden bepaald door

$$\begin{bmatrix} w_1^{(1)} \\ w_2^{(1)} \end{bmatrix} = 0.9257 \cdot \begin{bmatrix} 1.1997 & -0.1995 \\ 0.1197 & 0.8805 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.60 \\ -1.41 \end{bmatrix}$$

De exacte oplossing op $t = 0.0001$ wordt gegeven door

$$\begin{bmatrix} y_1(0.0001) \\ y_2(0.0001) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.61 \\ -1.39 \end{bmatrix}$$

Beide methoden geven bij deze stapgrootte een even goed resultaat. Daarbij moeten we wel opmerken dat de Euler Achterwaarts 'duurder' is in de rekentijd.

Conclusie: Bij een stijf stelsel geeft Euler Achterwaarts een goed antwoord voor alle stapgrootten h, terwijl Euler Voorwaarts alleen goede resultaten geeft voor (zeer kleine) stapgrootten, die moeten voldoen aan de stabiliteitsvoorwaarde.

2. De oplossing van de differentiaalvergelijking $y' = y - t^2 + 1$ in $t = 0.1$ wordt in deze opgave benaderd met zowel Euler Voorwaarts als de Runge Kutta 4 (RK4) methode. De Euler Voorwaarts methode is inmiddels al bekend. De RK4 methode wordt beschreven in Paragraaf 6.7 en is als volgt gedefinieerd

$$w_{n+1} = w_n + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4], \tag{4}$$

waarbij de predictoren $k_1, \ldots, k_4$ worden gegeven door

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(t_n, w_n) && (5) \\
k_2 &= hf(t_n + \frac{1}{2}h, w_n + \frac{1}{2}k_1) && (6) \\
k_3 &= hf(t_n + \frac{1}{2}h, w_n + \frac{1}{2}k_2) && (7) \\
k_4 &= hf(t_n + h, w_n + k_3) && (8)
\end{aligned}$$

(i) In het eerste deel benaderen we $y(0.1)$ met behulp van de Euler Voorwaarts methode met stapgrootte $h = 0.025$. Dit betekent dat we vier stappen van het schema

$$w_{n+1} = w_n + h(w_n - t_n^2 + 1)$$

moeten uitvoeren. Met de beginvoorwaarde $y(0) = w_0 = \frac{1}{2}$ verkrijgen we de volgende reeks van w_i's:

$$\begin{aligned}
w_1 &= w_0 + h(w_0 - 0^2 + 1) = \\
&= \frac{1}{2} + 0.025 \cdot 1\frac{1}{2} = 0.5375, \\
w_2 &= w_1 + 0.025(w_1 - 0.025^2 + 1) = 0.5759219 \\
w_3 &= w_2 + 0.025(w_2 - 0.050^2 + 1) = 0.6152574 \\
w_4 &= w_3 + 0.025(w_3 - 0.075^2 + 1) = 0.6554982
\end{aligned}$$

De benadering van $y(0.1)$ wordt gegeven door $w_4 = 0.6554982$.

(ii) Wederom gaan we $y(0.1)$ benaderen. We doen dit met de RK4 methode, beschreven door (4) t/m (8), met een stapgrootte van $h = 0.1$. Merk op dat in (5) t/m (8) $f(t_n, w_n) = w_n - t_n^2 + 1$.
We beginnen met het berekenen van de vier predictoren, waarbij $y(0) = w_0 = \frac{1}{2}$. Aldus

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(t_0, w_0) = \\
&= h(w_0 - t_0^2 + 1) = \\
&= 0.1(\frac{1}{2} - 0^2 + 1) = 0.15 \\
k_2 &= 0.1(w_0 + \frac{1}{2}k_1 - 0.05^2 + 1) = 0.15725 \\
k_3 &= 0.1(w_0 + \frac{1}{2}k_2 - 0.05^2 + 1) = 0.1576125 \\
k_4 &= 0.1(w_0 + k_3 - 0.1^2 + 1) = 0.1647613.
\end{aligned}$$

Dan volgt voor w_1:

$$\begin{aligned}
w_1 &= w_0 + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] = \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot 0.9444863 = 0.6574144.
\end{aligned}$$

M.b.v. RK4 wordt de benadering van $y(0.1)$ gegeven door $w_1 = 0.6574144$.

De exacte oplossing van de differentiaalvergelijking is $y(t) = -\frac{1}{2}e^t + t^2 + 2t + 1$. Op $t = 0.1$ is de exacte oplossing dus $y(0.1) = 0.6574145$.

Conclusie: We zien dat de benaderingen van beide methoden goed zijn en de hoeveelheid werk ongeveer hetzelfde is. Omdat de fout in de benadering van RK4 gelijk is aan 10^{-7} en bij Euler Voorwaarts gelijk aan 2×10^{-3}, verdient de RK4 methode de voorkeur.

3. De versterkingsfactor van RK4 is: $Q(h\lambda) = 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2!} + \frac{(h\lambda)^3}{3!} + \frac{(h\lambda)^4}{4!}$. Vergelijking met $e^{h\lambda}$ geeft dat de afbreekfout $O(h^4)$ is.

4. (a) $s(x) = x, x \in [0, \frac{1}{2}]$
   $s(x) = 7x - 3, x \in [\frac{1}{2}, 1]$

   (b) Bovengrens 0.375, echte afbreekfout 0.1875.

   (c) ε

   (d) Ja door verkleining van de stapgrootte neemt de afbreekfout af en blijft de afrondfout hetzelfde, zodat de totale fout zal afnemen. Echter het heeft geen zin om de stapgrootte veel kleiner te nemen, omdat de fout dan voornamelijk bepaald wordt door de afrondfout.