Oefenopgaven Serie 11 (cursus 2004/2005)
wi2604: Numerieke methoden I [1]

Behandelde begrippen

- niet-lineaire vergelijkingen, afrondfout
- Bisectie, convergentie, stopcriterium
- vaste punt methode, lineaire convergentie

Opgaven

1. Gegeven de functie $f(x) = x - cosx, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Hoeveel iteraties zijn er nodig met de Bisectie methode opdat de fout kleiner is dan 10^{-4}? Doe drie iteraties met de Bisectie methode.

2. We beschouwen het polynoom $f(x) = 1 - 6x + 15x^2 - 20x^3 + 15x^4 - 6x^5 + x^6$
   (a) Bepaal $f(1 + 10^{-k})$ voor k=4 en 5.
   (b) Is het nulpunt van de berekende functie in $x = 1$ uniek in het interval $[0.9, 1.1]$?
   (c) Kan de schatting van het onbetrouwbaarheidsinterval bepaald worden (+motivatie)?
   (d) Bedenk een manier, waarop de waarde van het polynoom nauwkeuriger bepaald kan worden (hint schrijf het polynoom als $(x - a)^b$).

3. Beschouw de vaste punt iteratie $x = \frac{5}{x^2} + 2$.
   (a) Bepaal een interval $[a, b]$ met $a \geq 2$ zodat $g(x) \in [a, b]$ als $x \in [a, b]$. Bepaal k zodat $|g'(x)| \leq k < 1$ als $x \in [a, b]$.
   (b) Bepaal op grond van de theorie hoeveel iteraties er nodig zijn opdat de fout kleiner is dan 10^{-2}.
   (c) Voer de iteraties uit.

4. (a) Laat zien dat de rij gedefinieerd door
   $$p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{p_{n-1}} \text{ voor } n \geq 1$$
   convergeert naar $\sqrt{2}$ als $p_0 > \sqrt{2}$.
   (b) Gebruik de ongelijkheid $0 < (p_0 - \sqrt{2})^2$ voor alle $p_0 \neq \sqrt{2}$ om te laten zien dat als $0 < p_0 < \sqrt{2}$, dan $p_1 > \sqrt{2}$.
   (c) Gebruik bovenstaande resultaten om te laten zien dat de rij p_n convergeert naar $\sqrt{2}$ voor alle $p_0 > 0$.

[1] voor de antwoorden zie: http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi211/anwer11.pdf