Oefenopgaven Serie 2 (cursus 2004/2005)
wi2604: Numerieke methoden I [1]

Behandelde begrippen

- Lagrange interpolatie, interpolatiefout
- Interpolatie met afgeleiden, Hermite interpolatie
- Lineaire splines, kubische splines

Opgaven

1. Laat zien dat $\Sigma_{k=0}^{n} L_{nk}(x) = 1$. (hint gebruik $f(x) \equiv 1$)

2. Bepaal een benadering van $\sin(37^o)$ met het tweede graads Lagrange polynoom van $f(x) = \sin(x)$ gebruikmakend van de volgende tabel (in 8 cijfers nauwkeurig):

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
36^o	0.58778525	0.80901699
38^o	0.61566148	0.78801075
40^o	0.64278761	0.76604444

   Vergelijk het antwoord met de exacte waarde (in 8 cijfers nauwkeurig): 0.60181502.

3. Toon zelf aan dat de afbreekfout van het tweede graads Lagrange polynoom gegeven wordt door:
$$\frac{f^{(3)}(\xi(x))}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

4. Laat zien dat $\frac{d\sin(\alpha)}{d\alpha} = \frac{2\pi}{360}\cos(\alpha)$ als α in ^{o} gemeten wordt. Benader $\sin 37^o$ met 3 orde Hermite interpolatie en vergelijk het antwoord met de exacte waarde: 0.60181502.

5. Bepaal $s(\frac{1}{2})$, waarbij s de natuurlijke kubische spline is met steunpunten 0, 1 en 2 voor de functie $f(x) = x$. Doe dit ook voor de functie $f(x) = x^2$.

6. Laat $(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)$ punten zijn zodanig dat $x_0 < x_1 < ... < x_n$. Laat f continu differentieerbaar zijn op $[x_j, x_{j+1}]$ voor $j = 0, ..., n-1$, $\int_{x_0}^{x_n}(f'(x))^2dx$ bestaat en $f(x_j) = y_j$ voor $j = 0, ..., n$. Toon aan dat de lineaire spline s de volgende eigenschap heeft:
$$\int_{x_0}^{x_n}(s'(x))^2dx \leq \int_{x_0}^{x_n}(f'(x))^2dx$$
(Hint: schrijf $f = s + (f - s)$ en gebruik partiële integratie)
Interpreteer het resultaat.

[1] voor de antwoorden zie: http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi211/answer2.pdf