

Oefenopgaven Serie 4 (cursus 2004/2005)
wi2604: Numerieke methoden I¹

Behandelde begrippen

- Methode van Euler, Modified Euler en Trapeziumregel
- impliciet, expliciet, éénstaps-schema's
- afbreekfout, consistentie

Opgaven

1. Gegeven de functie $f(x) = \sin x$, $x \in [0, \pi]$. Bepaal $f'(1)$ met behulp van een centrale differentie voor $h = 0.1$. Geef een schatting van de fout via Richardson's extrapolatie.
2. Gebruik de methode van Modified Euler om de oplossing te benaderen van het volgende beginwaardeprobleem: $y' = 1 + (t - y)^2$, $2 \leq t \leq 3$, $y(2) = 1$, met $h = 0.5$. De exacte oplossing wordt gegeven door $y(t) = t + \frac{1}{1-t}$. Bepaal de fout in de numerieke benadering.
3. Beschouw de hoeveelheid water q die uit een stuwmeer stroomt als functie van de tijd. Deze functie voldoet aan:

$$q' = 1 - q^2, \quad q(0) = 0.$$

Bepaal w_1 door 1 stap met de achterwaartse methode van Euler uit te voeren.

4. Beschouw het beginwaardeprobleem: $y' = -10y$, $0 \leq t \leq 2$, $y(0) = 1$. De oplossing hiervan is $y(t) = e^{-10t}$. Pas de voorwaartse methode van Euler toe met stapgrootte $h = 0.1$. Geef met behulp van een Taylorontwikkeling een bovenschatting van de lokale afbreekfout. Bepaal hiermee een bovenschatting voor $|y_1 - w_1|$ en vergelijk dit met de echte fout.
5. Beschouw het beginwaardeprobleem: $y' = y/x$, $1 \leq x \leq 2$, $y(1) = 1$. Voer 1 stap uit met de voorwaartse methode van Euler en Modified Euler. Merk op dat de antwoorden hetzelfde zijn. Verklaring?

¹voor de antwoorden zie: <http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi211/answer4.pdf>